Л. А. Аксентьев, А. Н. Ахметова

Казань, albina-achmetowa@yandex.ru

КВАЗИКОНФОРМНОСТЬ ГРАДИЕНТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ КОНФОРМНЫМ РАДИУСОМ

Г. Хиги [1] получена формула

$$R(D,z) = |f'(\zeta)|(1-|\zeta|^2) \tag{1}$$

для вычисления конформного радиуса односвязной области D в точке z, где $z = f(\zeta)$ — функция, реализующая конформное отображение единичного круга $E = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$ на область $D = f(E)$. Величину

$$\nabla R(D,z) = \frac{\partial R(D,z)}{\partial x} + i\frac{\partial R(D,z)}{\partial y} = 2\frac{\partial R}{\partial \bar{z}} = 2R_{\bar{z}}, \tag{2}$$

$z = x+iy \in D$, будем называть *комплексным градиентом* (для краткости градиентом) конформного радиуса [2], [3].

Доклад посвящен доказательству трех теорем.

Пусть $D_0 = \{z : |\operatorname{Im} z| < \pi/2\}$ и $D_\alpha = \{z : |\arg z| < \alpha\pi/2\}$, $0 < \alpha \leqslant 2$.

Теорема 1. *Градиент* (2) *конформного радиуса* (1) *для любой выпуклой области D, отличной от D_α и D_0, осуществляет квазиконформное отображение* [4]. *Для угловой области D_α, $0 < \alpha \leqslant 1$, и полосы D_0 по всей области справедливо тождество $|R_{\bar{z}\bar{z}}(D,z)/R_{\bar{z}z}(D,z)| \equiv 1$.*

Для вложенных выпуклых областей $f(rE)$, $0 < r < 1$, получим K-квазиконформные отображения с $K = K(r^2) \leqslant \leqslant \frac{1+r^2}{1-r^2}$.

Теорема 2. *Градиент* (2) *конформного радиуса* $R(f(E^-), f(\zeta))$ *для любой области* D^- *с конечным выпуклым дополнением осуществляет квазиконформное отображение.*

Для вложенных областей $f(rE^-)$, $1 < r < \infty$, *получим* K*-квазиконформные отображения с* $K = K(1/r^2) \leqslant \frac{r^2+1}{r^2-1}$.

Теорема 3. *Градиент* (2) *конформного радиуса для любой области* $f(E)$, $f(1) = \infty$, *за исключением* D_α, $\alpha \in [1, 2]$, *с бесконечным выпуклым дополнением осуществляет квазиконформное отображение. Для* D_α, $\alpha \in [1,2]$, *по всей области справедливо тождество* $|R_{\bar{z}\bar{z}}(D, z)/R_{\bar{z}z}(D, z)| \equiv 1$.

Для замкнутых областей $f(\tilde{E}_r)$, $\tilde{E}_r = \{z : |z - r| \leqslant 1 - r\}$, $0 < r < 1$, *градиент конформного радиуса вырождается только в* ∞.

Сформулированные результаты частично представлены в [5], [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Haegi H. R. *Extremalprobleme und Ungleichungen konformer Gebietsgrössen* // Compositio Math. – 1951. – Tom 8. – P. 81–111.

2. Avkhadiev F. G., Wirths K.-J. *The conformal radius as a function and its gradient image* // Israel Journal of Math. – 2005. – V. 145. – P. 349–374.

3. Avkhadiev F. G., Wirths K.-J. *Schwarz-Pick type inequalities.* – Birkhäuser Verlag, 2009. – 156 p.

4. Альфорс Л. *Лекции по квазиконформным отображениям.* – М.: Мир, 1969. – 135 с.

5. Аксентьев Л. А., Ахметова А. Н. *Об отображениях, связанных с градиентом конформного радиуса* // Изв. вузов. Матем. – 2009. – № 6. – С. 60–64 (краткое сообщение).

6. Аксентьев Л. А., Ахметова А. Н. *Об отображениях, связанных с градиентом конформного радиуса* // Матем. заметки. – 2009 (принято к печати).

Л. А. Александрова, Э. Н. Береславский

Санкт-Петербург, beres@nwgsm.ru, mymila@mail.ru

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНТУРА ОБТЕКАНИЯ ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТИ ОСНОВАНИЯ ГИДРОТЕХНИЧЕСКОГО СООРУЖЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ КРИВОЛИНЕЙНОГО ВОДОУПОРА

В рамках двумерной теории установившейся фильтрации строится плавный подземный контур гидротехнического сооружения, углы которого округлены по кривым постоянной величины скорости фильтрации, в случае, когда водопроницаемое основание подстилается криволинейным водоупором, в состав которого входит горизонтальный участок, характеризуемым постоянством скорости обтекания. Решение соответствующей многопараметрической краевой задачи теории аналитических функций осуществляется с помощью применения принципа симметрии Римана – Шварца и полуобратного варианта способа годографа скорости, впервые предложенного П. Я. Полубариновой-Кочиной и И. Н. Кочиной [1]. Приводятся результаты численных расчетов и дается гидродинамический анализ влияния основных физических параметров модели на форму и размеры подземного контура плотины, горизонтального и криволинейных участков водоупора. В частности,